

**МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РФ**  
**ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ**  
**ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ**  
**«ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»**  
**(ФГБОУ ВО «ВГУ»)**

УТВЕРЖДАЮ  
Заведующий кафедрой  
математического анализа  
С.А. Шабров



17.04.2024 г.

**РАБОЧАЯ ПРОГРАММА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ**

**Б1.В.ДВ.02.01. Решение задач для уравнений межотраслевого баланса**  
*Код и наименование дисциплины в соответствии с Учебным планом*

- 1. Шифр и наименование направления подготовки/специальности:**  
02.04.01 Математика и компьютерные науки
- 2. Профиль подготовки/специализации:** Математические методы и компьютерные технологии в естествознании, экономике и управлении
- 3. Квалификация (степень) выпускника:** Магистр
- 4. Форма образования:** Очная
- 5. Кафедра, отвечающая за реализацию дисциплины:** Кафедра математического анализа
- 6. Составители программы:**  
Зубова Светлана Петровна, доктор физ.-мат. наук, доцент  
(ФИО, ученая степень, ученое звание)
- 7. Рекомендована:** Научно-методическим Советом математического факультета протокол № 0500-03 от 28.03.2024 г.
- 8. Учебный год:** 2025/ 2026                      **Семестр:** 4

## 9. Цели и задачи учебной дисциплины:

*Целями освоения учебной дисциплины являются:*

- овладение конкретными математическими знаниями, классическими и современными методами исследования, необходимыми для применения в практической и научной деятельности, для продолжения образования;
- интеллектуальное развитие студентов, совершенствование математического образования.

*Задачи учебной дисциплины:*

- обеспечить прочное и сознательное овладение студентами системой математических знаний;
- развить умение применить их при решении задач естествознания;
- формирование устойчивого интереса к предмету, выявление и развитие математических способностей, ориентации на профессию.

**10. Место учебной дисциплины в структуре ООП:** учебная дисциплина «Решение задач для уравнений межотраслевого баланса» относится к части формируемой участниками образовательных отношений Блока 1.

Специальный курс «Решение задач для уравнений межотраслевого баланса» является логическим продолжением преподавания предметов: «Алгебра», «Математический анализ», «Дифференциальные уравнения», «Функциональный анализ» (бакалавриат). Он осуществляет разумный баланс между общеобразовательным содержанием подготовки магистра и его дальнейшей профессиональной направленностью, что, несомненно, повышает профессиональное самоопределение учащегося, уровень его социальной адаптации.

Обучение этим методам обусловлено широким спектром применения для решения научных и экономических проблем.

**11. Планируемые результаты обучения по дисциплине/модулю (знания, умения, навыки), соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы (компетенциями выпускников):**

| Код  | Название компетенции  | Коды   | Индикаторы  | Планируемые результаты обучения   |
|------|---|--------|---|---|
| ПК-1 | Способен проводить работы по сбору, обработке и анализу научно-технической информации и результатов исследований в области математического моделирования физических и экономических процессов методами математического анализа, а также реализовывать | ПК-1.1 | Обладает фундаментальными знаниями, полученными в области математических и (или) естественных наук, программирования и информационных технологий. | Знать:<br>фундаментальные положения, полученные в области математических и (или) естественных наук, программирования и информационных технологий. |

|      |  |        |  |   |
|------|--|--------|--|---|
| ПК-2 | соответствующие программные алгоритмы<br><br>Способен анализировать, систематизировать и обобщать передовой отечественный и международный опыт в области математического и компьютерного моделирования различных процессов | ПК-2.1 | Владеет современными методами сбора и анализа исследуемого материала, способами его аргументации. Владеет навыками научных обзоров, публикаций, рефератов и библиографий по тематике проводимых исследований на русском и английском языках. | Владеть: современными методами сбора и анализа исследуемого материала, способами его аргументации. Владеет навыками научных обзоров, публикаций, рефератов и библиографий по тематике проводимых исследований на русском и английском языках. |
|      |  | ПК-2.2 | Умеет решать научные задачи в связи с поставленной целью и в соответствии с выбранной методикой.   | Уметь: решать научные задачи в связи с поставленной целью и в соответствии с выбранной методикой.   |

**12. Объем дисциплины в зачетных единицах/час.(в соответствии с учебным планом) —   2   /  72 .**

**Форма промежуточной аттестации**      зачет

**13. Трудоемкость по видам учебной работы**

| Вид учебной работы              |                 | Трудоемкость |              |            |     |
|---------------------------------|-----------------|--------------|--------------|------------|-----|
|                                 |                 | Всего        | По семестрам |            |     |
|                                 |                 |              | № семестра 4 | № семестра | ... |
| Аудиторные занятия              |                 | 40           | 40           |            |     |
| в том числе:                    | лекции          | 20           | 20           |            |     |
|                                 | практические    | 20           | 20           |            |     |
|                                 | лабораторные    |              |              |            |     |
|                                 | курсовая работа |              |              |            |     |
| Самостоятельная работа          |                 | 32           | 32           |            |     |
| Промежуточная аттестация: зачет |                 |              |              |            |     |
| Итого:                          |                 | 72           | 72           |            |     |

### 13.1. Содержание дисциплины:

| № п/п | Наименование раздела дисциплины   | Содержание раздела дисциплины   | Реализация раздела Дисциплины с помощью онлайн-курса, ЭУМК *  |
|-------|---|---|---|
|       | <b>1. Лекции</b>  |   |   |
| 01    | Уравнение межотраслевого баланса в дифференциальной форме   | Уравнение Леонтьева. Постановки задач. Вопросы существования, единственности решения начальной задачи для дифференциального уравнения Леонтьева | <a href="https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=7615">https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=7615</a> |
| 02    | Свойства матрицы фондоёмкости   | Необратимость матрицы фондоёмкости, свойства необратимых матриц   | <a href="https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=7615">https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=7615</a> |
| 03    | Дифференциальные уравнения, разрешённые относительно производной, в конечномерных пространствах                         | Формула Коши решения начальной задачи, матричная экспонента, построение решений   | <a href="https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=7615">https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=7615</a> |
| 04    | Условия существования и единственности вектора конечного спроса в начальной задаче для уравнения межотраслевого баланса | Связь единственности вектора решения с регулярностью операторного пучка, с полнотой Жорданова набора элементов. Фазовое пространство            | <a href="https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=7615">https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=7615</a> |
| 05    | Вопросы достижимости конечного результата в системе межотраслевого баланса  | Параметры управления в межотраслевых экономических системах. Функции состояния, управления. Условия полной управляемости.                       | <a href="https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=7615">https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=7615</a> |
| 06    | Возмущение матрицы фондоёмкости. Влияние возмущений на результат  | Возмущения регулярные и сингулярные. Условие регулярности задачи для уравнения межотраслевого баланса.  | <a href="https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=7615">https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=7615</a> |
|       | <b>2. Практические</b>  |   |   |

|   |   |   |   |
|---|---|---|---|
| 1 | Уравнение Леонтьева   | Вывод уравнения Леонтьева. Смысл параметров уравнения. Примеры.   | <a href="https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=7615">https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=7615</a> |
| 2 | Матрица фондоёмкости  | Необратимость матрицы фондоёмкости. Ядро, коядро, образ, кообраз необратимой матрицы.   | <a href="https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=7615">https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=7615</a> |
| 3 | Дифференциальные уравнения, разрешённые относительно производной, в конечномерных пространствах                         | Решение дифференциальных уравнений, разрешённых относительно производной, в конечномерных пространствах с помощью формулы Коши. | <a href="https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=7615">https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=7615</a> |
| 4 | Условия существования и единственности вектора конечного спроса в начальной задаче для уравнения межотраслевого баланса | Построение фазового пространства для уравнения, неразрешённого относительно производной   | <a href="https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=7615">https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=7615</a> |
| 5 | Вопросы достижимости конечного результата в системе межотраслевого баланса  | Решение вопросов достижимости конечного результата в системе межотраслевого баланса с помощью критериев управляемости           | <a href="https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=7615">https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=7615</a> |

### 13.2. Темы (разделы) дисциплины и виды занятий

| № п/п | Наименование темы (раздела) дисциплины                              | Виды занятий (часов) |              |              |                        |       |
|-------|---|----------------------|--------------|--------------|------------------------|-------|
|       |   | Лекции               | Практические | Лабораторные | Самостоятельная работа | Всего |
| 01    | Уравнение межотраслевого баланса в дифференциальной форме           | 2                    | 2            |              | 6                      | 10    |
| 02    | Свойства матрицы фондоёмкости                                       | 4                    | 4            |              | 6                      | 14    |
| 03    | Дифференциальные уравнения, разрешённые относительно производной, в | 2                    | 2            |              | 6                      | 10    |

|    |  |    |    |  |    |    |
|----|--|----|----|--|----|----|
|    | конечномерных пространствах  |    |    |  |    |    |
| 04 | Условия существования и единственности вектора конечного спроса в начальной задаче для уравнения межотраслевого баланса векторов | 4  | 4  |  | 6  | 14 |
| 05 | Вопросы достижимости конечного результата в системе межотраслевого баланса   | 4  | 4  |  | 4  | 12 |
| 06 | Возмущение матрицы фондоемкости. Влияние возмущений на результат   | 4  | 4  |  | 4  | 12 |
|    | Итого  | 20 | 20 |  | 32 | 72 |

#### 14. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины:

В процессе преподавания дисциплины используются такие виды учебной работы, как лекции, практические занятия, а также различные виды самостоятельной работы обучающихся. На лекциях рассказывается теоретический материал, на практических занятиях решаются задачи по теоретическому материалу, прочитанному на лекциях.

При изучении курса «Решение задач для уравнения межотраслевого баланса» обучающимся следует внимательно слушать и конспектировать материал, излагаемый на аудиторных занятиях. Для его понимания и качественного усвоения рекомендуется следующая последовательность действий.

1. После каждой лекции студентам рекомендуется подробно разобрать прочитанный теоретический материал, выучить все определения и формулировки теорем, разобрать примеры, решенные на лекции. Перед следующей лекцией обязательно повторить материал предыдущей лекции.

2. Перед практическим занятием обязательно повторить лекционный материал. После практического занятия еще раз разобрать решенные на этом занятии примеры, после чего приступить к выполнению домашнего задания. Если при решении примеров, заданных на дом, возникнут вопросы, обязательно задать на следующем практическом занятии или в присутственный час преподавателю.

3. При подготовке к практическим занятиям повторить основные понятия по темам, изучить примеры. Решая задачи, предварительно понять, какой теоретический материал нужно использовать. Наметить план решения, попробовать на его основе решить практические задачи.

3. Выбрать время для работы с литературой по дисциплине в библиотеке.

Освоение дисциплины предполагает не только обязательное посещение обучающимся аудиторных занятий (лекций и практических занятий) и активную работу на них, но и самостоятельную учебную деятельность в семестрах, на которую отводится 32 часа.

Самостоятельная учебная деятельность студентов по дисциплине «Решение задач для уравнения межотраслевого баланса» предполагает изучение рекомендуемой преподавателем литературы по вопросам лекционных и

практических занятий (приведены выше), самостоятельное освоение понятийного аппарата и подготовку к текущим аттестациям (коллоквиумам и выполнению практических заданий) (примеры см. ниже).

Вопросы лекционных и практических занятий обсуждаются на занятиях в виде устного опроса – индивидуального и фронтального. При подготовке к лекционным и практическим занятиям, обучающимся важно помнить, что их задача, отвечая на основные вопросы плана занятия и дополнительные вопросы преподавателя, показать свои знания и кругозор, умение логически построить ответ, владение математическим аппаратом и иные коммуникативные навыки, умение отстаивать свою профессиональную позицию. В ходе устного опроса выявляются детали, которые по каким-то причинам оказались недостаточно осмысленными студентами в ходе учебных занятий. Тем самым опрос выполняет важнейшие обучающую, развивающую и корректирующую функции, позволяет студентам учесть недоработки и избежать их при подготовке к промежуточным аттестациям.

Все выполняемые студентами самостоятельно задания (выполнение контрольной работы и практических заданий) подлежат последующей проверке преподавателем. Результаты текущих аттестаций учитываются преподавателем при проведении промежуточной аттестации (зачет).

В случае необходимости перехода на дистанционный режим обучения используется электронный курс «Решение задач для уравнивания межотраслевого баланса» (URL: <https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=7615>) на портале «Электронный университет ВГУ».

**15. Перечень основной и дополнительной литературы, ресурсов интернет, необходимых для освоения дисциплины (список литературы оформляется в соответствии с требованиями ГОСТ и используется общая сквозная нумерация для всех видов источников)**

а) основная литература:

| № п/п | Источник   |
|-------|--|
| 1     | <i>Прасолов А.В. Динамические модели с запаздыванием и их применение в экономике и инженерии / А.В. Прасолов. – Изд-во Лань СпБ, 2010, – 192 с.</i><br><i>Айнабек К.С. <a href="#">Современные подходы формирования межотраслевого баланса / К.С. Айнабек. – Караганда : КЭУК, 2014. – 608 с.</a></i><br><a href="http://www.aup.ru/books/m250/3_5_1.htm">http://www.aup.ru/books/m250/3_5_1.htm</a> (51746 байт) 06.11.2014 |
| 2     | <i>Прасолов А.В. Динамические модели с запаздыванием и их применение в экономике и инженерии / А.В. Прасолов. – Изд-во Лань СпБ, 2010, – 192 с.</i>  |

б) дополнительная литература:

| № п/п | Источник   |
|-------|--|
| 3     | <i><a href="#">Будаев, Виктор Дмитриевич. Математический анализ : : учебник / В. Д. Будаев, М. Я. Якубсон ; В. Д. Будаев, М. Я. Якубсон .— Москва : Лань, 2012 .— 544 с. : ил. ; 22 см. — Допущено Учебно-методическим объединением по направлениям педагогического образованию Министерства образования и науки РФ в качестве учебника для студентов высших учебных заведений, обучающихся по направлению 050200 — «Физико-математическое образование». — Предм. указ.: с. 532-536 .— Имен. указ.: с. 537 .— Библиогр.: с. 531 .— ISBN 978-5-8114-1186-3 .— &lt;URL:<a href="http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_cid=25&amp;pl1_id=3173">http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_cid=25&amp;pl1_id=3173</a></a></i> |

|   |  |
|---|--|
| 4 | <i>Леонтьев В.В. Межотраслевая экономика / В.В. Леонтьев.- М. : Экономика, 1997. – 477 с.</i>  |
| 5 | <i>Архангельский Ю. С., Коваленко И.И. Межотраслевой баланс / Ю.С. Архангельский, И.И. Коваленко. - Киев : Выща шк., 1988 . — 245 с.</i> |

в) информационные электронно-образовательные ресурсы (официальные ресурсы интернет)\*:

| № п/п | Источник   |
|-------|--|
| 6     | <i>Межотраслевой баланс</i><br><a href="http://www.korrektorr.narod.ru/МОВ.htm">http://www.korrektorr.narod.ru/МОВ.htm</a>                             |
| 7     | <i>Дорф Р. Современные системы управления / Р. Дорф, Бишоп. –</i><br><a href="http://www.twirpx.com/file/21901/">http://www.twirpx.com/file/21901/</a> |
| 8     | <i>Электронный каталог Научной библиотеки Воронежского государственного университета –(http://www.lib.vsu.ru)</i><br><i>Google, Yandex, Rambler</i>    |

## 16. Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы

(учебно-методические рекомендации, пособия, задачки, методические указания по выполнению практических (контрольных) работ и др.)

| № п/п | Источник   |
|-------|--|
| 1     | <i>Кудрявцева Л.Б Товарная политика: учебное пособие / Л.Б. Кудрявцева. - Воронеж : ИПЦ ВГУ, 2011 . — 86 с.</i><br><a href="http://www.lib.vsu.ru/elib/texts/method/vsu/m11-40.pdf">http://www.lib.vsu.ru/elib/texts/method/vsu/m11-40.pdf</a> .           |
| 2     | <i>Азарнова Т.В. Математические модели производственных процессов, логистики и риска : учебное пособие для вузов /Т.В. Азарнова, Н.Б. Баева // Воронеж : Издательско-полиграфический центр Воронежского государственного университета, 2013 . — 139 с.</i> |
| 3     | <i>Дифференциальные уравнения, неразрешённые относительно производной : учебно-методическое пособие для вузов / сост. С.П. Зубова. – Воронеж : ИПЦ ВГУ, 2012. – 25 с.</i>  |

## 17. Образовательные технологии, используемые при реализации учебной дисциплины, включая дистанционные образовательные технологии (ДОТ), электронное обучение (ЭО), смешанное обучение):

При реализации дисциплины используются следующие образовательные технологии: логическое построение дисциплины, установление межпредметных связей, обозначение теоретического и практического компонентов в учебном материале, актуализация личного и учебно-профессионального опыта обучающихся, включение элементов дистанционных образовательных технологий.



В практической части курса используется стандартное современное программное обеспечение персонального компьютера.

В части освоения материала лекционных и лабораторных занятий, самостоятельной работы по отдельным разделам дисциплины, прохождения текущей и промежуточной аттестации может применяться электронное обучение и дистанционные образовательные технологии, в частности, электронный курс «Решение задач для уравнения межотраслевого баланса» (URL: <https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=7615>) на портале «Электронный университет ВГУ».

---

### **18. Материально-техническое обеспечение дисциплины:**

Учебная аудитория, специализированная мебель.

### **19. Оценочные средства для проведения текущей и промежуточной аттестаций**

Порядок оценки освоения обучающимися учебного материала определяется содержанием следующих разделов дисциплины:

| № п/п | Наименование раздела дисциплины (модуля)  | Компетенция(и) | Индикатор(ы) достижения компетенции | Оценочные средства                                |
|-------|---|----------------|-------------------------------------|---|
| 1.    | Уравнение межотраслевого баланса в дифференциальной форме<br>Уравнение Леонтьева                | ПК-1           | ПК-1.1                              | Комплект контрольных и лабораторных заданий № 1,2 |
| 2.    | Дифференциальные уравнения, разрешённые относительно производной, в конечномерных пространствах | ПК-1           | ПК-1.1                              | Комплект контрольных и лабораторных заданий № 1,2 |
| 3     | Уравнение межотраслевого баланса в дифференциальной форме<br>Уравнение Леонтьева                | ПК-2           | ПК-2.1<br>ПК-2.2                    | Комплект контрольных и лабораторных заданий № 1,2 |

| № п/п  | Наименование раздела дисциплины (модуля)  | Компетенция(и) | Индикатор(ы) достижения компетенции | Оценочные средства  |
|--|---|----------------|-------------------------------------|---|
| 4  | Условия существования и единственности вектора конечного спроса в начальной задаче для уравнения межотраслевого баланса | ПК-1           | ПК-1.1                              | Комплект контрольных и лабораторных заданий № 1,2, Тест №1, Тест №2 |
| 5  | Вопросы достижимости конечного результата в системе межотраслевого баланса  | ПК-2           | ПК-2.1<br>ПК-2.2                    | Комплект контрольных и лабораторных заданий № 1,2, Тест №1, Тест №2 |
| 6  | Возмущение матрицы фондоемкости. Влияние возмущений на результат  | ОПК-1          | ПК-2.1<br>ПК-2.2                    | Комплект контрольных и лабораторных заданий № 1,2, Тест №1, Тест №2 |
| Промежуточная аттестация<br>форма контроля – зачет |   |                |                                     | Перечень вопросов к зачету, КИМ № 1-5                               |

## 20 Типовые оценочные средства и методические материалы, определяющие процедуры оценивания

### 20.1 Текущий контроль успеваемости

Текущая аттестация проводится в соответствии с Положением о текущей аттестации обучающихся по программам высшего образования Воронежского государственного университета.

Текущая аттестация проводится в форме контрольных работ и лабораторных работ, содержание которых приведено ниже. В ходе контрольной работы обучающемуся выдается КИМ с практическим перечнем заданий и предлагается решить данные задания. В ходе выполнения заданий нельзя пользоваться средствами связи (включая сеть Интернет) и любыми печатными материалами, ограничение по времени — 90 астрономических минут.

### Контрольная работа №1

1. Единственно ли состояние системы  $A \frac{dx}{dt} = Bx(t) + f(t)$ , если матрица прямых

затрат – это  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ , а производство характеризуется матрицей  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ?

2. Достижим ли плановый выпуск продукции в заданный момент времени для системы

Леонтьева, если запасы и производство характеризуются матрицами  $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$  и

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$  соответственно?

### Контрольная работа №2

1. Достижим ли выпуск продукции  $(1,1,3)$  для системы Леонтьева, если запасы и производство характеризуются матрицами

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}$  и  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$  соответственно?

2. Найти вектор валового выпуска для системы Леонтьева, если запасы и производство

характеризуются матрицами  $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$  и  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$  соответственно, а вектор

конечного спроса равен

$(1,2,1)$ ?

### Лабораторная работа №1

Возможно ли удовлетворение конечного спроса продукции  $(2,1,2)$  в момент  $T = 5$  для системы Леонтьева, если запасы и производство характеризуются матрицами

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$  и

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ соответственно?}$$

### Лабораторная работа №2

Достигим ли выпуск продукции (3,1,1) для системы Леонтьева, если запасы и производство характеризуются матрицами

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \text{ и } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \text{ соответственно?}$$

Для оценивания результатов каждой лабораторной и контрольной работы используется шкала: «зачтено», «не зачтено».

Соотношение показателей, критериев и шкалы оценивания результатов обучения показаны в следующей таблице:

| Критерии оценивания компетенций   | Уровень сформированности компетенций | Шкала оценок |
|---|--------------------------------------|--------------|
| При выполнении лабораторной или контрольной работы студент продемонстрировал в достаточной мере: знание основ составления компьютерных программ для решения типовых математических задач, имеющихся ресурсов для решения прикладных математических задач, умение использовать стандартные пакеты программного обеспечения для решения типовых математических задач, владение навыками хранения, поиска, сбора, систематизации, обработки и использования информации.    | Достаточный уровень                  | Зачтено      |
| При выполнении лабораторной или контрольной работы студент не продемонстрировал в достаточной мере: знание основ составления компьютерных программ для решения типовых математических задач, имеющихся ресурсов для решения прикладных математических задач, умение использовать стандартные пакеты программного обеспечения для решения типовых математических задач, владение навыками хранения, поиска, сбора, систематизации, обработки и использования информации. | –                                    | Не зачтено   |

## 20.2 Промежуточная аттестация

Промежуточная аттестация в 3 семестре по дисциплине заключается в защите контрольных и лабораторных работ 1-2 и собеседовании по теоретическим вопросам.

### Перечень вопросов к зачету:

1. Уравнение межотраслевого баланса в дифференциальной форме.
2. Свойства матрицы фондоемкости.
3. Условия существования и единственности вектора производства в начальной задаче для уравнения межотраслевого баланса.
4. Условия достижимости конечного результата в системе межотраслевого баланса.
5. Определение вектора валового выпуска в системе Леонтьева в случае невырожденности матрицы фондоемкости.
6. Исследование единственности или неединственности вектора валового выпуска в случае необратимости матрицы фондоемкости.
7. Определение допустимого множества начальных состояний.
8. Построение фазового пространства векторов валового выпуска.
9. Влияние возмущений матрицы фондоемкости на конечный результат в задаче для уравнения межотраслевого баланса.

### КИМ (зачёт)

#### КИМ №1

1. Уравнение межотраслевого баланса в дифференциальной форме.
2. Единственно ли состояние системы  $A \frac{dx}{dt} = Bx(t) + f(t)$ , если матрица

прямых затрат – это  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ , а производство характеризуется матрицей

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}?$$

**КИМ №2**

1. Свойства матрицы фондоемкости.
2. Достижим ли плановый выпуск продукции в заданный момент времени для системы Леонтьева, если запасы и производство характеризуются матрицами

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ и } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \text{ соответственно?}$$

**КИМ №3**

1. Условия существования и единственности вектора производства в начальной задаче для уравнения межотраслевого баланса.

2. Достижим ли выпуск продукции  $(2, 2, 1)$  для системы Леонтьева, если запасы и производство характеризуются матрицами

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ и } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \text{ соответственно?}$$

**КИМ №4**

1. Условия достижимости конечного результата в системе межотраслевого баланса.

2. Найти вектор валового выпуска для системы Леонтьева, если запасы и

$$\text{производство характеризуются матрицами } \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} \text{ и } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

соответственно, а вектор конечного спроса равен  $(2, 1, 1)$ ?

**КИМ №5**

1. Определение вектора валового выпуска в системе Леонтьева, если матрица фондоемкости невырожденная.
2. Возможно ли удовлетворение конечного спроса продукции  $(3, 1, 2)$  в момент  $T = 10$  для системы Леонтьева, если запасы и производство характеризуются

$$\text{матрицами } \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ и}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \text{ соответственно?}$$

Для оценивания результатов обучения на зачете используются следующие **показатели:**

- 1) знание теоретических основ;
- 2) умение решать задачи лабораторной работы;
- 3) умение работать с алгоритмами методов и информационными ресурсами;
- 4) знание основ составления компьютерных программ для решения типовых математических задач численных методов;
- 5) успешное прохождение текущей аттестации.

Для оценивания результатов обучения на зачете используется **шкала:** «зачтено», «не зачтено».

**Соотношение показателей, критериев и шкалы оценивания результатов обучения:**

| Критерии оценивания компетенций   | Уровень сформированности компетенций | Шкала оценок |
|---|--------------------------------------|--------------|
| Полное соответствие ответа обучающегося всем перечисленным показателям по каждому из вопросов контрольно-измерительного материала. Умение применять на практике методы и средства для решения типовых задач, эффективного использования ресурсов современных глобальных сетей в исследованиях.  | <i>Повышенный уровень</i>            | Зачтено      |
| Несоответствие ответа обучающегося одному из перечисленных показателей (к одному из вопросов контрольно-измерительного материала) и правильный ответ на дополнительный вопрос в пределах программы.   | <i>Базовый уровень</i>               | Зачтено      |
| Несоответствие ответа обучающегося любым двум из перечисленных показателей и неправильный ответ на дополнительный вопрос в пределах программы.  | <i>Пороговый уровень</i>             | Зачтено      |
| Несоответствие ответа обучающегося любым из перечисленных показателей (в различных комбинациях по отношению к вопросам контрольно-измерительного материала). В ответе на основные вопросы содержатся отрывочные знания основ, способствующих решению задач профессиональной деятельности, допускаются грубые ошибки при демонстрации умений применять на практике методы для решения типовых задач. | –                                    | Не зачтено   |

### 20.3 Фонд оценочных средств сформированности компетенций студентов, рекомендуемый для проведения диагностических работ

#### 1) закрытые задания (тестовые, средний уровень сложности):

1. Вставьте пропущенное значение

При каком значении  $\alpha$  производство конечного продукта достижимо для системы

$$x_1'(t) = 3x_1(t) + 2x_2(t),$$

$$x_2'(t) = x_1(t) + \alpha x_2(t) + u(t).$$

Ответ:  $\alpha \in R$ .

2. Выберите верный ответ из предложенных.

Достижение произвольного конечного продукта в системе межотраслевого баланса определяется

- 1) По формуле Коши,
- 2) По критерию Хаутуса,
- 3) Методом Крамера.

Ответ: по критерию Хаутуса.

3. Выберите верный ответ из предложенных.

Кто описал систему межотраслевого баланса в дифференциальной форме

- 1) Леонтьев,
- 2) Кобзон,
- 3) Калман,

Ответ: Леонтьев.

4. Выберите верный ответ из предложенных.

Динамическая модель межотраслевого баланса

- 1) Дискретная,
- 2) Непрерывная,
- 3) Интегральная.

Ответ: непрерывная.

5. Модель межотраслевого баланса это

$$1) x_1'(t) = \int_0^T x(t, s) ds,$$

$$2) Ax_1'(t) = Bx(t) + Du(t) + f(t),$$

$$3) x_1'(t) = \sqrt{x(t)},$$

Ответ:  $Ax_1'(t) = Bx(t) + Du(t) + f(t)$ .



## 2) открытые задания (тестовые, повышенный уровень сложности)

### Тест № 1

1. Единственно ли состояние системы  $A \frac{dx}{dt} = Bx(t) + f(t)$ , если матрица прямых

затрат – это  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ , а производство характеризуется матрицей  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ?

2. Достижим ли плановый выпуск продукции в заданный момент времени для системы Леонтьева, если запасы и производство характеризуются матрицами

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}$  и  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$  соответственно?

### Тест № 2

1. Найти вектор валового выпуска для системы Леонтьева, если запасы и производство характеризуются матрица

2. Единственно ли состояние системы  $A \frac{dx}{dt} = Bx(t) + f(t)$ , если матрица

прямых затрат – это  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ , а производство характеризуется матрицей

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ ?

### 3) задания с решениями

1. Единственно ли состояние системы  $A \frac{dx}{dt} = Bx(t) + f(t)$ , если матрица прямых

затрат – это  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ , а производство характеризуется матрицей  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ?

Решение. Состояние  $x(t)$  единственно тогда и только тогда, когда  $B$  – жорданова цепочка для  $A$  имеет конечную длину. Строим элементы  $u_1, u_2, \dots$   $B$  – жордановой цепочки.

$$Au_1 = 0 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{11} \\ u_{12} \\ u_{13} \end{pmatrix} = 0 \rightarrow u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

$$Au_1 = Bu_1 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{21} \\ u_{22} \\ u_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow 5 = 0 \rightarrow u_2$$

не существует.

Цепочка состоит из одного элемента  $u_1$ , следовательно,  $x(t)$  единственно.

Ответ:  $x(t)$  единственно.

2. Возможно ли удовлетворение произвольного конечного спроса продукции, если

матрица фондоемкости имеет вид  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ?

Решение. Проверяем матрицу на обратимость:  $\det A = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 4 + 9 +$

$$8 - 6 - 6 - 8 = 1 \neq 0.$$

Поскольку  $A$  – обратимая матрица, то решение уравнения межотраслевого баланса с фиксированным начальным условием единственно, и оно не может принимать произвольные значения при  $t > 0$ .

Ответ: невозможно.

3. Прогнозируем ли конечный результат в системе

$$\begin{aligned} x_1'(t) + x_3'(t) &= x_1 - x_2(t), \\ x_1'(t) + x_2'(t) + x_3'(t) &= x_2(t) + x_3(t), \\ x_2'(t) &= x_1(t) + x_2(t).? \end{aligned}$$

Решение. Результат прогнозируем, если матрица  $A - \lambda B$  обратима при малых  $\lambda \neq 0$ , Исследуем  $A - \lambda B$ .

$$A - \lambda B = \begin{pmatrix} 1 - \lambda & \lambda & 1 \\ 1 & 1 - \lambda & 1 - \lambda \\ -\lambda & 1 - \lambda & 0 \end{pmatrix},$$

$\det(A - \lambda B) = 0$ , если  $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = \frac{3}{2}$ . При  $0 < |\lambda| < 1$  пучок  $A - \lambda B$  обратим.

Ответ. Результат прогнозируемый.

4. Устойчиво ли решение уравнения межотраслевого баланса при малых возмущениях  $\varepsilon$  в матрице фондоемкости, если

$$A = \begin{pmatrix} 1 + \varepsilon & 1 & 0 \\ 0 & 2 - \varepsilon & \varepsilon \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 7 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}?$$

Решение. Решение устойчиво тогда и только тогда, когда длины  $B$  – жордановых цепочек для  $A$  и для  $A - \varepsilon C$  совпадают.

Строим элементы  $B$  – жордановой цепочки для  $A$ , т.е. элементы  $V_i$  такие, что  $AV_i = 0$

$$AV_2 = V_1, AV_3 = BV_2, ..$$

$$AV_1 = 0 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{11} \\ v_{12} \\ v_{13} \end{pmatrix} = 0 \rightarrow V_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$AV_2 = BV_1 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{21} \\ v_{22} \\ v_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 7 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix},$$

$$v_{21} + v_{22} = 3,$$

$$2v_{22} = 0, \rightarrow 0 = 3 (?!) \rightarrow \nexists v_2,$$

B – жорданова цепочка для A состоит из 1 элемента.

Строим B – жорданову цепочку для A - εC

$$(A - \varepsilon C)W_1 = 0 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 + \varepsilon & 1 & 0 \\ 0 & 2 - \varepsilon & \varepsilon \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_{11} \\ w_{12} \\ w_{13} \end{pmatrix} = 0 \rightarrow (1 + \varepsilon)w_{11} + w_{12} = 0,$$

$$(2 - \varepsilon)w_{12} + \varepsilon w_{13} = 0, w_{11} = 0$$

$$\rightarrow w_{11} = 0, w_{12} = 0, w_{13} = 0 \rightarrow w_1 = 0.$$

В B-цепочке для A 0 элементов. Длины цепочек разные, следовательно, решение неустойчиво, малое изменение матрицы фондоемкости влечет значительное изменение вектора спроса

Ответ. Решение неустойчиво.

5. Существует ли управляющий фактор u(t) в системе Леонтьева, чтобы удовлетворить конечный спрос продукции (2, 1, 2), если запасы и производство

характеризуются матрицами  $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  и  $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ , а матрица управления  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ?

Решение. Систему баланса с заданными матрицами:

$$x'_1 + x'_2 + 2x'_3 = 2x_1 + x_2 + x_3 + u_1,$$

$$2x'_1 + 2x'_3 = x_1 + u_2,$$

$$3x'_1 = 3x_1 + x_2 + x_3$$

следует разрешить относительно производной:

$$x'_1 = x_1 + \frac{1}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_3,$$

$$x'_2 = 4x_1 + \frac{4}{3}x_2 + \frac{4}{3}x_3 + u_1 - u_2,$$

$$x'_3 = -\frac{3}{2}x_1 - \frac{1}{3}x_2 - \frac{1}{3}x_3 + \frac{1}{2}u_2,$$

$$\text{Здесь } \tilde{B} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 4 & \frac{4}{3} & \frac{4}{3} \\ -\frac{3}{2} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Матрица управляемости Хаутуса  $(D\tilde{B} - \lambda I)$  – это матрица

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 - \lambda & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 1 & -1 & 4 & \frac{4}{3} - \lambda & \frac{4}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} - \lambda \end{pmatrix}.$$

Она имеет 3 линейно независимых первых столбцов при  $\lambda \neq 1$ , т.к.

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 - \lambda \\ 1 & -1 & 4 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \end{vmatrix} = 1 - \lambda \neq 0 \text{ при } \lambda \neq 1.$$

При  $\lambda = 1$  в матрице управляемости

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 1 & -1 & 4 & \frac{1}{3} & \frac{4}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{3} & -\frac{4}{3} \end{pmatrix}$$

3 линейно независимые первый, второй и четвертый вектор-столбцы. Ранг матрицы  $(D \tilde{B} - \lambda I)$  равен трем при всех  $\lambda \in \mathbb{C}$ , следовательно, система полностью управляемая.

Ответ: соответствующее управление существует.

### **Критерии и шкалы оценивания заданий ФОС:**

1) Задания закрытого типа (выбор одного варианта ответа, верно/неверно):

- 1 балл – указан верный ответ;
- 0 баллов – указан неверный ответ.

2) Задания закрытого типа (множественный выбор):

- 2 балла – указаны все верные ответы;
- 0 баллов – указан хотя бы один неверный ответ.

3) Задания закрытого типа (на соответствие):

- 2 балла – все соответствия определены верно;
- 0 баллов – хотя бы одно сопоставление определено неверно.

4) Задания открытого типа (короткий текст):

- 2 балла – указан верный ответ;
- 0 баллов – указан неверный ответ.

5) Задания открытого типа (число):

- 2 балла – указан верный ответ;
- 0 баллов – указан неверный ответ.

Задания раздела 20.3 рекомендуются к использованию при проведении диагностических работ с целью оценки остаточных результатов освоения данной дисциплины (знаний, умений, навыков).